

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие

г. Ставрополь
2021

УДК 51 (075.8)

ББК 22.1я73

Литвин, Д.Б.

Интегральное исчисление функций: Учебное пособие / Литвин Д.Б. –
Ставропольский гос. аграрный университет. - Ставрополь, 2021. – 76 с.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению
38.03.01 - Экономика. Содержание материала в целом соответствует второй ча-
сти дисциплины «Математический анализ».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ	3
1 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ	4
1.1 Понятие неопределенного интеграла	4
1.2 Свойства неопределенного интеграла	4
2 ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ	5
2.1 Метод непосредственного интегрирования	5
2.2 Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)	9
2.3 Метод интегрирования по частям	12
3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	18
3.1 Комплексные числа	18
3.2 Понятия о рациональных функциях	24
3.3 Интегрирование простейших рациональных дробей	27
3.4 Интегрирование рациональных дробей	28
4 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ	33
4.1 Тригонометрические подстановки	33
4.2 Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$	35
4.3 Использование тригонометрических преобразований	36
5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ	37
6 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ	42
6.1 Определенный интеграл и его свойства	42
6.2 Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла	50
6.3 Вычисление объемов тел вращения	55
6.4 Вычисление длины дуги плоской кривой	58
6.5 Вычисление площади поверхности вращения	63
Контрольная работа «Неопределенный интеграл» (типовые варианты)	68
Контрольная работа «Определенный интеграл» (типовые варианты)	69
Приложение 1. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ	70
Приложение 2. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ	71
Приложение 3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПОДСТАНОВКИ	72
Приложение 4. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ	73
ЛИТЕРАТУРА	75

1 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1 Понятие неопределенного интеграла

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ - множество всех первообразных $F(x) + C$ для $f(x)$, который обозначается символом $\int f(x) dx$

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (1)$$

1.2 Свойства неопределенного интеграла

В соответствие с определением (1) неопределенный интеграл обладает следующими свойствами.

$$1. \quad d \int f(x) dx = f(x) dx, \quad \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Используется для проверки «правильности» интегрирования.

$$2. \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$3. \quad \int af(x) dx = a \cdot \int f(x) dx, \quad a \neq 0 - \text{постоянная.}$$

$$4. \quad \int (f(x) \pm g(x)) = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

$$5. \quad \text{Если } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

$$\text{Пример: } \int \sin(2x-5) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cos(2x-5) + C.$$

6. (Инвариантность формулы интегрирования). Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(u) du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Так из формулы $\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$ для различных $u = \varphi(x)$ получаем:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x \cdot d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Таблица основных интегралов представлена в приложении 2.

2 ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

2.1 Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием.

При сведении данного интеграла к табличному часто используется операция подведения под знак дифференциала:

$$du = d(u \pm a), \quad du = \frac{1}{a} d(au), \quad \text{где } a - \text{число,}$$

$$\cos u du = d(\sin u), \quad \sin u du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u} du = d(\ln u), \quad \frac{1}{\cos^2 u} du = d(\operatorname{tg} u).$$

Вообще, $f'(u) du = d(f(u))$, эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

Примеры:

- $$\int (2x^4 - 3x^2 + x - 5) dx = 2 \int x^4 dx - 3 \int x^2 dx + \int x dx - \int 5 dx =$$
$$= \frac{2}{5} x^5 - x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 5x + C,$$
- $$\int \frac{x+1}{x} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x} \right) dx = x + \ln|x| + C,$$
- $$\int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C,$$
- $$\int \left(4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x} \right) dx = 4 \int x^3 dx - 5 \int \frac{dx}{\cos^2 2x} + \int 3^{1-x} dx =$$
$$= x^4 - \frac{5}{2} \operatorname{tg} 2x - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + C,$$
- $$\int (3x-1)^{24} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{25}}{25} + C;$$
- $$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\operatorname{ctg} x - x + C,$$
- $$\int \sin^2 6x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 12x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{12} \sin 12x \right) + C,$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 1 + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + 2}} =$$

$$= \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + (\sqrt{2})^2}} = \ln|x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 3}| + C;$$

$$9. \int x(x+2)^9 dx = \int (x+2-2)(x+2)^9 dx = \int (x+2)^{10} dx - 2 \int (x+2)^9 dx =$$

$$= \frac{(x+2)^{11}}{11} - 2 \frac{(x+2)^{10}}{10} + C;$$

$$10. \int x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2} dx = \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot x \cdot (x^2+1-1) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{\frac{4}{3}} d(1+x^2) - \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} d(1+x^2) = \frac{3}{14} (1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Задания для самостоятельной работы:

$$1. \int \left(x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$2. \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$$

$$3. \int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx$$

$$4. \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$$

$$5. \int (2x\sqrt{x} - 7x)^2 dx$$

$$6. \int e^x \left(1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx.$$

$$7. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$8. \int e^{-3x} dx.$$

$$9. \int (3 - 2x)^4 dx.$$

$$10. \int e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$11. \int \frac{x-2}{x^3} dx$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$13. \int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

2.2 Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

В ряде случаев подынтегральное выражение удастся представить в виде

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx. \quad (2)$$

Тогда используя замену переменной интегрирования (подстановку)

$t = \varphi(x)$, исходный интеграл приводится к новому, более простому интегралу:

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \left. \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{array} \right| = \int f(t)dt. \quad (3)$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x .

Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

Примеры:

$$\begin{aligned} 1. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} &= \left. \begin{array}{l} t = \sqrt{3} \cdot x \\ dt = \sqrt{3} \cdot dx \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin \frac{t}{2} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} + C; \end{aligned}$$

$$2. \quad \int tgudu = \int \frac{\sin u \cdot du}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C \quad (\text{вывод формулы 7});$$

$$3. \quad \int \frac{dx}{ctg^5 x \cdot \sin^2 x} = \left. \begin{array}{l} t = ctgx \\ dt = \frac{-dx}{\sin^2 x} \end{array} \right| = -\int t^{-5} dt = -\frac{t^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{4ctg^4 x} + C ;$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \int x \cdot \sqrt{x-3} dx &= \left. \begin{array}{l} t = \sqrt{x-3} \\ x = t^2 + 3 \\ dx = 2t \cdot dt \end{array} \right| = \int (t^2 + 3) \cdot t \cdot 2tdt = 2 \int (t^4 + 3t^2) dt = \\ &= 2 \int t^4 dt + 6 \int t^2 dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

$$5. \quad \int \frac{dx}{e^x + 1} = \left. \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2 + t} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} =$$

$$= -\int \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t + \frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}} \right| + C = -\ln \left| \frac{t+1}{-t} \right| = \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C.$$

Задание для самостоятельной работы:

1. $\int 5x \sqrt{1-2x^2} dx$

2. $\int \frac{x^2 dx}{(3+2x^3)^2}$

3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+7}}$

4. $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$

5. $\int \sin^2 x \cos x dx.$

6. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}.$

7. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$

8. $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

9. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1 - 4^x}}$

$$10. \int \frac{e^{3x} dx}{1 - e^{3x}}$$

$$11. \int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$$

2.3 Метод интегрирования по частям

Рассмотрим функцию, которая представляет собой произведение двух других, более простых функций, имеющих непрерывные производные

$$g(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \text{или кратко} \quad g = u \cdot v.$$

Тогда ее дифференциал примет вид $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Интегрируя это равенство, получим $\int d(uv) = uv = \int u dv + \int v du$, откуда получаем формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du. \tag{4}$$

Эта формула позволяет свести вычисление интеграла $\int f(x) dx = \int u dv$ к вычислению более простого интеграла $\int v du$.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv ; затем, после нахождения $v = \int dv$ и $du = u' dx$, используется формула (4) интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Примеры:

$$\begin{aligned}
1. \quad \int (2x+1)e^{3x} dx &= \left| \begin{array}{l} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = (2x+1) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} \cdot 2 dx = \\
&= \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C. \\
2. \quad \int x \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C \\
3. \quad \int x^2 e^x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2 \int e^x \cdot x dx = \left| \begin{array}{l} u_1 = x \Rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = e^x dx \Rightarrow v_1 = e^x \end{array} \right| = \\
&= x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C;
\end{aligned}$$

Некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

а) Интегралы вида $\int P(x)a^{kx} dx$, $\int P(x) \cdot \sin kx dx$, $\int P(x) \cos kx dx$,

где $P(x)$ — многочлен, k — число. Удобно положить $u = P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители. Этому случаю соответствуют рассмотренные выше примеры.

б) Интегралы вида $\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$, $\int P(x) \ln(x) dx$,
 $\int P(x) \operatorname{arctg}(x) dx$, $\int P(x) \operatorname{arcctg}(x) dx$.

Удобно положить $P(x) dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

Примеры:

$$\begin{aligned}
1. \quad \int \ln x \cdot dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - x + C. \\
2. \quad \int \operatorname{arctg} x dx &= \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\
&= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.
\end{aligned}$$

в) **Интегралы вида** $\int e^{ax} \cdot \sin bxdx$, $\int e^{ax} \cdot \cos bxdx$, где a и b — числа, называются циклическими.

Они вычисляются двойным применением формулы (4). За u можно принять, как функцию $u = e^{ax}$, так и $u = \cos bx$.

Пример. Вычислить интегралы

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bxdx \text{ и } I_2 = \int e^{ax} \sin bxdx.$$

Для I_1 получим

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \left| \begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax} dx, \\ dv = \cos bxdx, v = \frac{1}{b} \sin bx, \end{array} \right| = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bxdx.$$

К последнему интегралу снова применим интегрирования по частям:

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \left| \begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax} dx, \\ dv = \sin bxdx, v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right| = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bxdx.$$

Подставляя полученное выражение в предыдущее равенство, получим

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bxdx.$$

Найдем из последнего равенства I_1 :

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \left(\frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} \cos bx \right) + C \frac{a^2 + b^2}{b^2},$$

откуда
$$I_1 = \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Аналогично находим
$$I_2 = \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

Пример (вывод формулы 14). $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = ?$

Произведем тождественные преобразования. Умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sqrt{a^2 - x^2}$:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int x \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям:

$$\int x \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, v = -\sqrt{a^2 - x^2} \end{array} \right| = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Подставляя последний результат в полученное ранее выражение данного интеграла, будем иметь

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Переносим интеграл справа налево и выполнив элементарные преобразования, окончательно получим

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. $\int (2 - x) \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx$

2. $\int (2x + 3) \ln x dx$

3. $\int e^{2x} \sin 3x dx$

4. $\int (x^2 - 5x - 1) \cos 6x dx$

5. $\int x^3 \operatorname{arctg} x dx$

6. $\int x^2 \cdot 5^{\frac{x}{2}} dx$

7. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$

3 ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

3.1 Комплексные числа

Алгебраическая форма комплексных чисел.

Комплексным числом z называется выражение

$$z = a + ib, \quad (5)$$

где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$$i^2 = -1; \quad i = \sqrt{-1}. \quad (6)$$

При этом число a называется действительной частью числа z ($a = \operatorname{Re} z$), а b – мнимой частью ($b = \operatorname{Im} z$).

Комплексное число z можно представить в трех эквивалентных формах:

- алгебраической;
- тригонометрической;
- показательной.

Выражение (5) называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Тригонометрическая форма комплексного числа

Из геометрических соображений видно, что $a = r \cos \phi$; $b = r \sin \phi$.

Тогда комплексное число можно представить в тригонометрической форме записи:

$$z = a + ib = r \cos \phi + ir \sin \phi = r(\cos \phi + i \sin \phi). \quad (7)$$

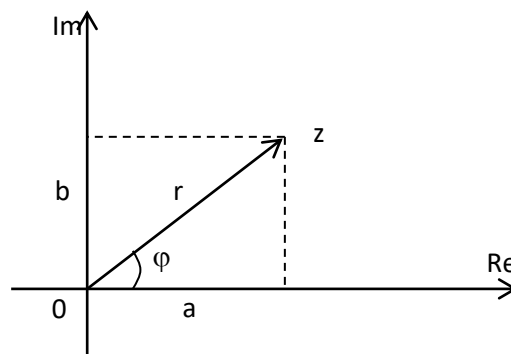


Рисунок 1 – Геометрическое представление комплексного числа z

При этом величина r называется модулем комплексного числа, а угол ϕ – аргументом комплексного числа.

$$r = |z|; \quad \phi = \operatorname{Arg} z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \text{Arg } z = \text{arctg } \frac{b}{a}. \quad (8)$$

Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются комплексно – сопряженными. Изображающие их векторы симметричны относительно действительной оси.

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \quad \text{Arg } z = -\text{Arg } \bar{z}.$$

Действия с комплексными числами в алгебраической форме записи

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

$$\begin{aligned} z = z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 = \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2) \end{aligned}$$

В случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Деление выполняется умножением числителя и знаменателя дроби на число комплексно-сопряженной знаменателю

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

Показательная форма комплексного числа. Формула Эйлера

Формулой Эйлера называют выражение

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (9)$$

Использование этой формулы позволяет представить тригонометрическую форму записи комплексного числа (7) в виде

$$z = re^{i\varphi}. \quad (10)$$

Выражение (10) называется показательной формой записи комплексного числа.

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$; $e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$; $(e^z)^m = e^{mz}$; где m – целое число.

Из уравнений $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ получаем:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}; \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

Показательная форма удобна для возведения комплексных чисел в степень

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (11)$$

и извлечения корней

$$\sqrt[n]{z} = (re^{i(\varphi+2\pi k)})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi+2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi+2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (12)$$

Таким образом, корень n -ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Выражения (11), (12) называются **формулами Муавра** (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик).

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

Пример. Найти формулы $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$.

Рассмотрим комплексное число $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi)$.

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$

Приравнивая, получим $\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi$,

откуда $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$; $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$.

Получили известные формулы двойного угла.

Примеры действий с комплексными числами:

Пример 1. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i$; $z_2 = -7 - 2i$.

Найти значение выражения $\left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{-4}$ в алгебраической форме.

Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-4} = \left(\frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2 - 7i}{-14 - 4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14 - 4i}{2 - 7i}\right)^4 = 16 \left(\frac{-7 - 2i}{2 - 7i}\right)^4$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7 - 2i}{2 - 7i} = \frac{(-7 - 2i)(2 + 7i)}{(2 - 7i)(2 + 7i)} = \frac{-14 - 49i - 4i + 14}{4 + 49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$.

Пример 2. Для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20} , найти корни уравнения $w^3 + z = 0$.

Число $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ представим в виде $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, где

$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4; \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -60^\circ$$

Тогда $z = 4(\cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ)) = 4(\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)$.

Для нахождения z^{20} воспользуемся формулой Муавра (11)

$$\begin{aligned} z^{20} &= 4^{20}(\cos 1200^\circ - i \sin 1200^\circ) = 4^{20}(\cos(3 \cdot 2\pi + 120^\circ) - i \sin(3 \cdot 2\pi + 120^\circ)) = \\ &= 4^{20}(\cos 120^\circ - i \sin 120^\circ) = -4^{20} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right). \end{aligned}$$

Если $w^3 + z = 0$, то $w = \sqrt[3]{-z}$. Применим формулу Муавра (12)

$$\sqrt[3]{-z} = \sqrt[3]{4} \left(-\cos \frac{60^\circ + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{60^\circ + 2\pi k}{3} \right); \quad k = 0, 1, 2;$$

$$w_1 = \sqrt[3]{4}(-\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ); \quad \text{для } k = 0;$$

$$w_2 = \sqrt[3]{4}(-\cos 140^\circ + i \sin 140^\circ); \quad \text{для } k = 1;$$

$$w_3 = \sqrt[3]{4}(\cos 100^\circ - i \sin 100^\circ); \quad \text{для } k = 2.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Построить на комплексной плоскости точки, соответствующие числам:

$$z_1 = -3 + 5i, z_2 = -4i, z_3 = 2, z_4 = 2\sqrt{3} - 2i$$

2. Даны числа $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = -2 - 2i$. Записав числа в показательной форме, выполнить следующие действия: а). $z_1 \cdot z_2$, б). $\frac{z_1}{z_2}$, в). z_1^8 , г). $\sqrt[5]{z_2}$.

3. Дано комплексное число $z = \frac{-2\sqrt{2}}{1-i}$. Требуется: 1) записать число z в алгебраической и тригонометрической формах; 2) найти все корни уравнения $w^3 + z = 0$.

3.2 Понятия о рациональных функциях

Функция вида $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$ называется целой рациональной функцией от x .

Отсюда следует, что любой многочлен n -ой степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).

Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $a + ib$, то он имеет и сопряженный корень $a - ib$.

В разложении многочлена комплексные корни входят сопряженными парами. Перемножив линейные множители получим трехчлен второй степени с действительными коэффициентами

$$\begin{aligned}(x - (a + ib)) \cdot (x - (a - ib)) &= ((x - a) - ib)((x - a) + ib) = \\ &= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,\end{aligned}$$

где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$.

С учетом выше изложенного справедлива следующая теорема.

Всякий многочлен с действительными коэффициентами разлагается на линейные и квадратные множители с действительными коэффициентами, т.е. многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_r)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m} \quad (13)$$

При этом $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(s_1 + s_2 + \dots + s_m) = n$, где все квадратные трехчлены **не имеют вещественных корней**.

Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е. $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ — где $P_m(x)$

- многочлен степени m , а $Q_n(x)$ — многочлен степени n .

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m < n$; в противном случае (если $m \geq n$) рациональная дробь называется *неправильной*.

Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$, т.е. $\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$.

Например, $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2}$ неправильная рациональная дробь. Разде-

лим числитель на знаменатель в столбик:

$$\begin{array}{r}
 x^4 \qquad \qquad -5x + 9 \\
 - \underline{x^4 - 2x^3} \\
 \qquad \qquad \qquad 2x^3 \qquad -5x + 9 \\
 \qquad \qquad \qquad - \underline{2x^3 - 4x^2} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 4x^2 - 5x + 9 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - \underline{4x^2 - 8x} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 3x + 9 \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - \underline{3x - 6} \\
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 15.
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l} x - 2 \\ \hline x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \end{array} \right.$$

Получим частное $L(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ и остаток $R(x) = 15$. Следова-

тельно, $\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + 2x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x - 2}$.

Простейшие рациональные дроби I, II, III и IV типов

- I. $\frac{A}{x - a}$;
- II. $\frac{A}{(x - a)^k}$ ($k \geq 1, k \in \mathbb{N}$);
- III. $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$ (корни знаменателя комплексные, т. е. $p^2 - 4q < 0$);
- IV. $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$ ($k \geq 2$, корни знаменателя комплексные),

где A, a, M, N, p, q — действительные числа.

Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель которой

разложен на множители

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде суммы простейших дробей.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

$$1) \frac{x^2 + 4}{(x-2)(x-3)^3} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{(x-3)^3};$$

$$2) \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1};$$

$$3) \frac{7x^2 + 8x + 9}{(x-1)(x-2)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Mx + N}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ в разложениях можно применить **метод неопределенных коэффициентов**. Суть метода рассмотрим **на примере**:

Представить дробь $\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}$ в виде суммы простейших дробей:

Т.к. трехчлен $x^2 - 2x + 5$ не имеет действительных корней ($D < 0$), то

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5},$$

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{A(x^2 - 2x + 5) + (x-1)(Bx + C)}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)}.$$

Отсюда следует

$$2x^2 - 3x - 3 \equiv Ax^2 - 2Ax + 5A + Bx^2 - Bx + Cx - C,$$

т. е.

$$2x^2 - 3x - 3 \equiv (A + B)x^2 + (-2A - B + C)x + (5A - C).$$

Приравнивая коэффициенты при x^2, x^1, x^0 , получаем

$$\begin{cases} 2 = A + B, \\ -3 = -2A - B + C, \\ -3 = 5A - C. \end{cases}$$

Решая систему, находим, что $A = -1, B = 3, C = -2$. Следовательно,

$$\frac{2x^2 - 3x - 3}{(x-1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{3x - 2}{x^2 - 2x + 5}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов применяют также **метод частных значений аргумента**: после получения тождества аргументу x придают конкретные значения столько раз, сколько неопределенных коэффициентов (обычно полагают вместо x значения **действительных** корней знаменателя).

Пример. Представить дробь $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}$ в виде суммы простейших

дробей.

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}.$$

$$3x-4 \equiv A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2).$$

Положим $x=0$, тогда $-4 = -2A$, т. е. $A=2$; положим $x=2$, тогда $2=6B$,

т. е. $B = \frac{1}{3}$ положим $x=-1$, тогда $-7=3C$, т. е. $C = -\frac{7}{3}$. Следовательно,

$$\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{\frac{1}{3}}{x-2} + \frac{-\frac{7}{3}}{x+1}.$$

3.3 Интегрирование простейших рациональных дробей

I. $\int \frac{A}{x-a} dx = \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C;$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \cdot \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C;$

III. Интегралы $J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$. с комплексно-сопряженными полюсами берутся выделением полного квадрата в знаменателе с последующей подстановкой, как показано в примере.

Пример. Найти $\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10} dx$.

Решение: $x^2+2x+10 = (x+1)^2+9$. Сделаем подстановку $x+1=t$. Тогда $x=t-1$, $dx=dt$ и

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+10} dx = \int \frac{3(t-1)+2}{t^2+9} dt = 3 \int \frac{tdt}{t^2+9} - 2 \int \frac{dt}{t^2+9} =$$

$$\frac{3}{2} \ln(t^2+9) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+10) - \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C.$$

IV. Вычисление интеграла вида $I = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx$, $k \geq 2$, $q - \frac{p^2}{4} > 0$.

Данный интеграл подстановкой $x + \frac{p}{2} = t$ сводится к сумме двух интегралов:

ЛОВ:

$$I = M \int \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k}, \quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}.$$

Первый интеграл легко вычисляется:

$$\int \frac{tdt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2} \int (t^2 + a^2)^{-k} d(t^2 + a^2) = \frac{1}{2(1-k)(t^2 + a^2)^{k-1}} + C.$$

Вычислим второй интеграл:

$$\begin{aligned} J_k &= \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2 + a^2) - t^2}{(t^2 + a^2)^k} dt = \\ &= \frac{1}{a^2} \left(\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} \right) = \frac{1}{a^2} \left(J_{k-1} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^k} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Откуда

$$J_k = \frac{1}{a^2} \left(\frac{2k-3}{2k-2} J_{k-1} + \frac{t}{2(k-1)(t^2 + a^2)^{k-1}} \right). \quad (15)$$

Полученная формула дает возможность найти интеграл J_k для любого натурального числа $k > 1$.

Пример. Найти интеграл $J_3 = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^3}$.

Решение: Здесь $a = 1$, $k = 3$. Так как $J_1 = \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \arctgt + C_1$,

то используя (15), получим

$$J_2 = \int \frac{dt}{(t^2 + 1)^2} = \frac{2 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2 - 2} J_1 + \frac{t}{2 \cdot (2-1)(t^2 + 1)} = \frac{1}{2} \arctgt + \frac{t}{2(t^2 + 1)} + C_1,$$

$$J_3 = \frac{3}{4} J_2 + \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} = \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \arctgt + \frac{t}{2(t^2 + 1)} \right) + C.$$

3.4 Интегрирование рациональных дробей

Общее правило интегрирования рациональных дробей.

- Если дробь неправильная, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби;
- Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей;
- Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx$.

Решение: Под знаком интеграла неправильная дробь; выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель:

$$\begin{array}{r} x^5 + 2x^3 + 4x + 4 \Big| x^4 + 2x^3 + 2x^2 \\ \underline{x^5 + 2x^4 + 2x^3} \\ -2x^4 \\ \underline{-2x^4 - 4x^3 - 4x^2} \\ 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \quad (\text{остаток}). \end{array}$$

Получаем:

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2}.$$

Разложим правильную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2},$$

$$4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \equiv Ax(x^2 + 2x + 2) + B(x^2 + 2x + 2) + (Cx + D)x^2,$$

т.е.

$$4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 \equiv (A + C)x^3 + (2A + B + D)x^2 + (2A + 2B)x + 2B.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} A + C = 4, \\ 2A + B + D = 4, \\ 2A + 2B = 4, \\ 2B = 4. \end{cases}$$

Находим: $B = 2$, $A = 0$, $C = 4$, $D = 2$. Стало быть,

$$\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}$$

и

$$\frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} = x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2}.$$

Интегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx = \int \left(x - 2 + \frac{2}{x^2} + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 2} \right) dx = \\ = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} + \int \frac{4x + 2}{(x+1)^2 + 1} dx.$$

Обозначим $x + 1 = t$, тогда $x = t - 1$ и $dx = dt$. Таким образом,

$$\int \frac{4x + 2}{(x+1)^2 + 1} dx = \int \frac{4t - 4 + 2}{t^2 + 1} dt = 4 \int \frac{t dt}{t^2 + 1} - 2 \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \\ = 4 \cdot \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) - 2 \operatorname{arctg} t + C = 2 \cdot \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{arctg}(x + 1) + C.$$

Следовательно,

$$\int \frac{x^5 + 2x^3 + 4x + 4}{x^4 + 2x^3 + 2x^2} dx = \frac{x^2}{2} - 2x - \frac{2}{x} - 2 \ln(x^2 + 2x + 2) - 2 \operatorname{arctg}(x + 1) + C.$$

Отметим, что любая рациональная функция интегрируется в элементарных функциях.

Задания для самостоятельной работы:

1. $\int \frac{2x - 3}{x^2 + 2x + 7} dx$

2. $\int \frac{5x + 1}{x^2 - 4x + 1} dx$

3. $\int \frac{x^5 - x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$

4. $\int \frac{x^3 - 3x^2 - 12}{(x-4)(x-2)x} dx.$

5. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx.$

4 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

4.1 Тригонометрические подстановки

Функцию с переменными $\sin x$ и $\cos x$, над которыми выполняются рациональные действия (сложения, вычитание, умножение и деление) принято обозначать $R(\sin x; \cos x)$, где R — знак рациональной функции.

Вычисление интегралов типа $\int R(\sin x; \cos x) dx$ сводится к вычислению интегралов от рациональной функции т.н. универсальной тригонометрической подстановкой

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t. \quad (16)$$

Действительно,

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$
$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

Поэтому

$$\int R(\sin x; \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}; \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2t}{1+t^2} dt = \int R_1(t) dt,$$

где $R_1(t)$ — рациональная функция от t . Обычно этот способ весьма громоздкий, зато он всегда приводит к результату.

Пример 1.1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x}$.

Решение: Сделаем универсальную подстановку $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тогда $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$,

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3 + \sin x + \cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(3 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 2} =$$

$$= \int \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t + \frac{1}{2}}{\sqrt{7}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1 + 2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{7}} + C.$$

Пример 1.2. Вывод формулы (16). Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{\frac{2t}{1+t^2}(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Пример 1.3. Вывод формулы (17). Найти интеграл $\int \frac{dx}{\cos x}$.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{\frac{1-t^2}{1+t^2}(1+t^2)} = 2 \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{2}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C =$$

$$= \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cdot \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$$

Здесь использовалась известная формула: $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$,

$$1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cdot \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right).$$

На практике универсальная подстановка часто приводит к слишком сложным рациональным функциям. Поэтому наряду с ней имеет смысл освоить также **другие подстановки**, которые в некоторых случаях быстрее приводят к цели.

1) Если интеграл имеет вид $\int R(\sin x) \cos x dx$, то, очевидно, подстановка

$$t = \sin x; \quad dt = \cos x dx \quad (17)$$

рационализирует его, т.е. приводит к виду $\int R(t) dt$.

2) Если интеграл имеет вид $\int R(\cos x) \sin x dx$, то он приводится к интегралу от рациональной функции заменой

$$t = \cos x; \quad dt = -\sin x dx. \quad (18)$$

3) Если подынтегральная функция зависит только от tgx , то подстановка

$$t = tgx; \quad x = arctgt; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad (19)$$

рационализирует этот интеграл: $\int R(tgx) dx = \int \frac{R(t)}{1+t^2} dt$.

4) Если подынтегральная функция имеет вид $R(\sin x; \cos x)$, но $\sin x$ и $\cos x$ входят только в четных степенях, то применяется та же подстановка (19):

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2} \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}. \quad (20)$$

Пример 2. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$.

Решение: Так как подынтегральная функция зависит только от квадрата $\sin x$, то имеем 4-й случай подстановки (20). Поэтому

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1 + \frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{2t^2 + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2 + 1} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \sqrt{2}t + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2}tgx) + C. \end{aligned}$$

4.2 Интегралы типа $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$

Для нахождения таких интегралов используются следующие приемы:

- 1) подстановка (17), т.е. $\sin x = t$, если n — целое положительное нечетное число;
- 2) подстановка (18), т.е. $\cos x = t$, если m — целое положительное нечетное число;
- 3) формулы понижения порядка:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad (21)$$

если m и n — целые неотрицательные четные числа;

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \frac{1}{2^2} \int (1 - \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8} \right) + C. \end{aligned}$$

- 4) если оба показателя четные, причем хотя бы один из них отрицателен, то предыдущий прием не годится. Здесь следует сделать замену $t = \operatorname{tg}x$ (или $t = \operatorname{ctg}x$).

Пример 3. Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

Решение: Применим подстановку $\sin x = t$.

$$\text{Тогда } x = \arcsin t, \quad dx = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \quad \cos x = \sqrt{1-t^2} \text{ и}$$

$$\begin{aligned} I &= \int t^4 \cdot (\sqrt{1-t^2})^5 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int t^4 (1-t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \\ &= \frac{t^5}{5} - 2\frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{2}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти интеграл $I = \int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Решение:

$$\begin{aligned} I &= \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8} \int \frac{1}{2} (1 - \cos 4x) dx - \\ &\quad - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти интеграл $I = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x} = \int \cos^{-1} x \cdot \sin^{-3} x dx$.

Решение: Здесь $m + n = 4$. Обозначим $\operatorname{tg}x = t$.

$$\text{Тогда } x = \operatorname{arctg}t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \text{ и}$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3} = \int \frac{1+t^2}{t^3} dt = \int t^{-3} dt + \int \frac{dt}{t} = \\ &= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 x + \ln|\operatorname{tg}x| + C. \end{aligned}$$

4.3 Использование тригонометрических преобразований

Интегралы типа $\int \sin ax \cdot \cos bxdx$, $\int \cos ax \cdot \cos bxdx$, $\int \sin ax \cdot \sin bxdx$ вычисляются с помощью известных формул тригонометрии:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Пример 6. Найти интеграл $I = \int \sin 8x \cos 2x dx$.

Решение:

$$I = \int \sin 8x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 10x + \sin 6x) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{10} \cos 10x - \frac{1}{6} \cos 6x \right) + C.$$

5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Тригонометрическая подстановка

Интегралы следующих типов приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций подстановками

$$\text{интегралы: } \int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad \int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \quad \int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

$$\text{подстановки: } \quad x = a \cdot \sin t, \quad x = a \cdot \operatorname{tg} t, \quad x = \frac{a}{\sin t}.$$

Пример 1. Найти интеграл $I = \int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x^2} dx$.

Решение: Положим $x = 2 \sin t$, $dx = 2 \cos t dt$, $t = \arcsin \frac{x}{2}$. Тогда

$$I = \int \frac{\sqrt{4 - 4 \sin^2 t}}{4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = \int \frac{4 \cos^2 t}{4 \sin^2 t} dt =$$

$$= \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C =$$

$$= C - \arcsin \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \left(\arcsin \frac{x}{2} \right) = C - \arcsin \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$$

$$\left(\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} \right).$$

Подстановки Эйлера [2] для $\int R(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$, $a \neq 0$.

1-я подстановка, при $a > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{a} \cdot x + t;$$

2-я подстановка, при $c > 0$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c};$$

3-я подстановка, для действительных корней трехчлена α, β

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t.$$

Пример 2. (Вывод формулы (11)). Найти интеграл $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm c}} dx$.

Применим 1-ю подстановку Эйлера

$$\sqrt{x^2 \pm c} = -x + t; \quad t = x + \sqrt{x^2 \pm c};$$

Тогда $x^2 \pm c = x^2 - 2xt + t^2$;

Откуда $x = \frac{t^2 - m c}{2t}$; $dx = \frac{t^2 \pm c}{2t^2} \cdot dt$; $\sqrt{x^2 \pm c} = t - \frac{t^2 - m c}{2t} = \frac{t^2 \pm c}{2t}$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm c}} dx = \int \frac{2t}{t^2 \pm c} \cdot \frac{t^2 \pm c}{2t^2} \cdot dt = \int \frac{dt}{t} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm c}| + C.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. $\int \sin^2 3x dx$

2. $\int (1 + 2 \cos x)^2 dx$

$$3. \int \cos^4 x dx$$

$$4. \int \sin^2 x \cos^4 x dx$$

$$5. \int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$6. \int \sin^5 x dx$$

$$7. \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x}$$

$$8. \int \sin 3x \sin 5x dx$$

$$9. \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}.$$

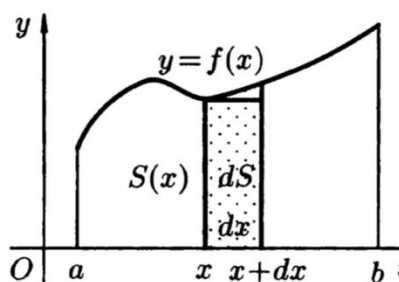
6 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

6.1 Определенный интеграл и его свойства

Определенный интеграл от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ - предел интегральной суммы при $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, если он не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$, ни от выбора точек ξ_i на отрезках $[x_{i-1}, x_i]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (22)$$

Геометрический смысл определенного интеграла (22) - площадь криволинейной трапеции $S(x)$, если $f(x) \geq 0$ (см. рис. 2):



$$S = \int_a^b f(x) dx \text{ или } S = \int_a^b y dx. \quad (23)$$

Криволинейная трапеция ограничена линиями

$$y = f(x) \geq 0, \quad x = a, \quad x = b, \quad y = 0$$

Рисунок 2 - Геометрический смысл определенного интеграла

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^b [c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)] dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx; \quad (24)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx; \quad (25)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx; \quad (26)$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi). \quad (27)$$

Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (28)$$

где $F(x)$ - какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$.

Замена переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt, \quad \text{где } x = \varphi(t), \quad \varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b. \quad (29)$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_4^{16} \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)} dx$.

Применим подстановку $\sqrt{x} = t; x = t^2; dx = 2t \cdot dt$. Воспользуемся формулой замены переменной (29) и определим новые пределы интегрирования: $x = 4$ при $t = 2$, $x = 16$ при $t = 4$, получим

$$\int_4^{16} \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)} dx = \int_2^4 \frac{t \cdot 2t}{t^2(t-1)} dt = 2 \int_2^4 \frac{dt}{t-1} = 2 \ln|t-1| \Big|_2^4 = 2(\ln 3 - \ln 1) = 2 \ln 3.$$

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx$.

Дважды применим формулу интегрирования по частям: $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 4 \quad dv = \cos 3x dx \\ du = 2x dx \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3} (x^2 - 4) \sin 3x \Big|_{-2}^0 - \\ - \frac{2}{3} \int_{-2}^0 x \sin 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin 3x dx \\ du = dx \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = -\frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} x \cos 3x \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{3} \int_{-2}^0 \cos 3x dx \right) = \\ &= -\frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3} \cos 6 + \frac{1}{9} \sin 3x \Big|_{-2}^0 \right) = \frac{4}{9} \cos 6 + \frac{2}{27} \sin 6. \end{aligned}$$

Для вычисления несобственных интегралов необходимо применить предельный переход, то есть изменить пределы интегрирования так, чтобы они стали конечными (для несобственных интегралов 1-го рода) и подынтегральная функция сохранила непрерывность внутри и на концах нового промежутка интегрирования (для несобственных интегралов 2-го рода).

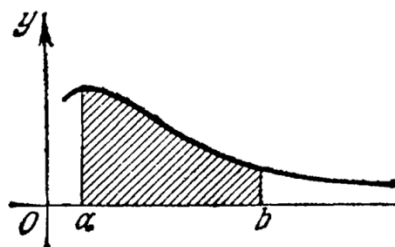


Рисунок 3

Интеграл с бесконечным пределом интегрирования (1-го рода)

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (30)$$

Если этот предел существует, то интеграл сходится, иначе - расходится.

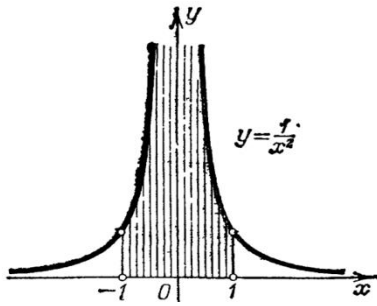


Рисунок 4

Интеграл от разрывной функции (2-го рода)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_2}^b f(x) dx. \quad (31)$$

Пример 3. Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

Используя выражение (30) для несобственного интеграла 1-го рода, имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Так как подынтегральная функция разрывна в точке $x=0$, то данный несобственный интеграл 2-го рода нужно представить как сумму двух слагаемых (31):

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Вычислим каждый предел отдельно:

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = - \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} = - \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1} \right) = \infty;$$

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} = - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = \infty.$$

Интеграл расходится, как на участке $[-1, 0]$, так и на участке $[0, 1]$.

Таким образом, данный интеграл расходится на всем отрезке $[-1, 1]$.

Отметим, что если вычислять данный интеграл, не обращая внимания на разрыв подынтегральной функции, то получим неверный результат:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = - \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{-1} \right) = -2,$$

что невозможно (см. рисунок 4).

Задания для решения в аудитории:

1) Вычислить определенный интеграл.

$$1. \int_0^1 x^2 dx$$

$$2. \int_1^2 2^{3x-4} dx$$

$$3. \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$4. \int_0^1 xe^{-x} dx$$

$$5. \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx$$

2) Вычислить, используя указанные подстановки:

$$1. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x \cdot dx, \quad \cos x = t.$$

$$2. \int_1^4 \frac{x \cdot dx}{\sqrt{2+4x}}, \quad 2+4x = t^2.$$

$$3. \int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t.$$

$$4. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}, \quad x = \operatorname{tgt}.$$

$$5. \int_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x} dx, \quad \sqrt{x-1} = t.$$

$$6. \int_{3/4}^{4/3} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}}, \quad z = \frac{1}{x}.$$

$$7. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x}, \quad \sin x = t.$$

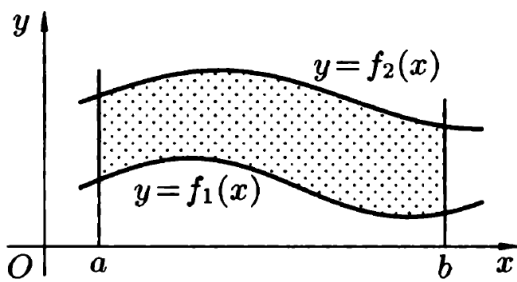
2). Изобразить график подынтегральной функции и найти несобственный интеграл

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+2}$$

$$2. \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

$$3. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

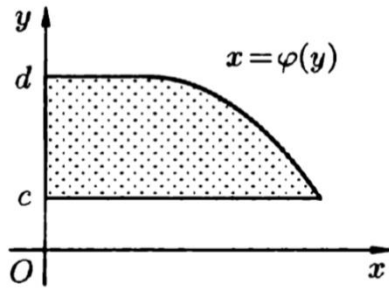
6.2 Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла



Интегрирование **по x** в декартовой системе координат (СК)

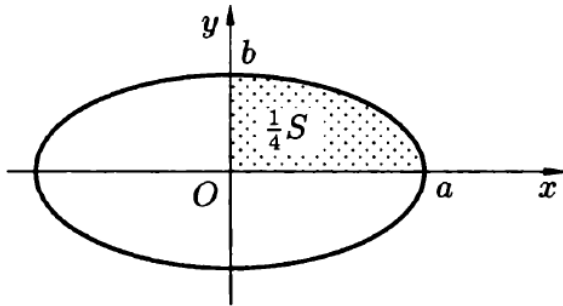
$$S = \int_a^b y \cdot dx, \quad y = f(x); \quad (32)$$

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (33)$$



Интегрирование **по y** в декартовой системе координат

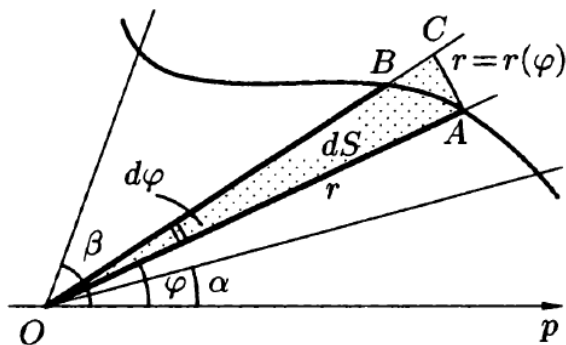
$$S = \int_c^d x \cdot dy, \quad x = \varphi(y). \quad (34)$$



Для параметрически заданных функций в декартовой СК

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

$$S = \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} y dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt. \quad (35)$$



В полярной системе координат

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (36)$$

Для определения площадей фигур, ограниченных сверху и снизу заданными кривыми $y_1(x), y_2(x)$, прежде чем применять соответствующую формулу для нахождения площади нужно определить пределы интегрирования, т.е. абсциссы точек пересечения кривых $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Они находятся как решения уравнения: $y_1(x) = y_2(x)$. Корни этого уравнения x_1, x_2 , причем $x_1 < x_2$ являются пределами интегрирования.

Пример 1. Вычислить сегмент площади фигуры, ограниченной графиками функций $y = (x - 2)^3$, $y = 4x - 8$.

Найдем точки пересечения графиков функций: $(x - 2)^3 = 4x - 8$,

$$(x - 2)^3 = 4(x - 2); \quad (x - 2)((x - 2)^2 - 4) = 0;$$

$$(x - 2) = 0; \rightarrow x_1 = 2; \quad (x - 2)^2 = 4; \rightarrow x_2 = 0, \quad x_3 = 4.$$

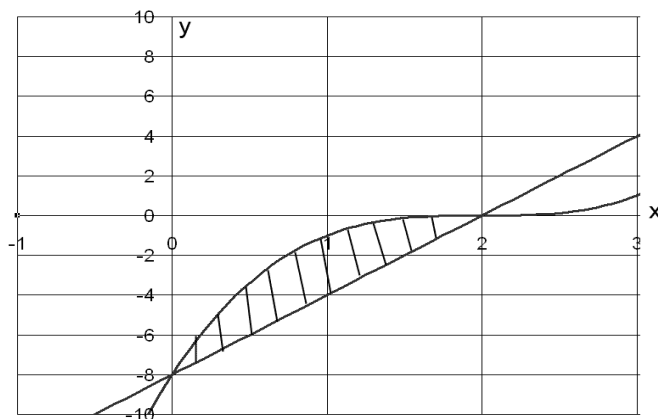


Рисунок 5

Тогда первый сегмент площади отыщется следующим образом (33)

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^2 (4x - 8 - (x - 2)^3) dx = 2 \int_0^2 (4x - 8 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8) dx = \\ &= 2 \int_0^2 (6x^2 - x^3 - 8x) dx = 2 \left(2x^3 - \frac{1}{4}x^4 - 4x^2 \right) \Big|_0^2 = 4 \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^2 = 8. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x = acost$, $y = bsint$ (см. рисунок 6).

Найдем сначала четвертую часть площади S . Здесь x изменяется от 0 до a , следовательно, t изменяется от $\frac{\pi}{2}$ до 0. По формуле (35) получим

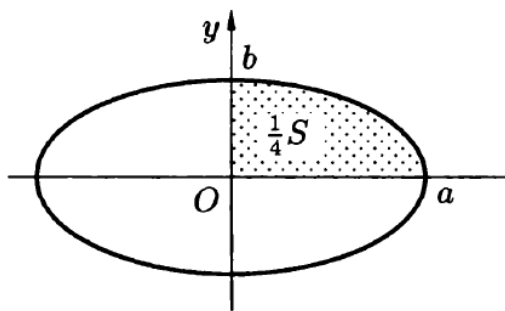


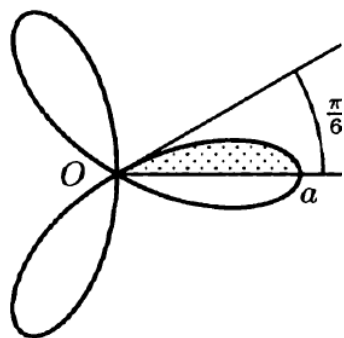
Рисунок 6

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t \cdot (-a \sin t) dt = \\ &= -ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= \frac{ab}{2} \left(t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{1}{4} S = \frac{\pi ab}{4}$. Значит, площадь всего эллипса $S = \pi ab$.

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой» $r = a \cos 3\varphi$ (см. рисунок 7).

Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т. е. шестую часть всей площади фигуры:



$$\begin{aligned} \frac{1}{6}S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (a \cos 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4} \left(\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \right) = \frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi}{6} + 0 \right) = \frac{\pi a^2}{24}, \end{aligned}$$

т. е. $\frac{1}{6}S = \frac{\pi a^2}{24}$. Следовательно, $S = \frac{\pi a^2}{4}$.

Рисунок 7

Задания для решения в аудитории:

Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

1. $y_1 = 4 - x^2$; $y_2 = x^2 - 2x$.

2. $y^2 = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.

3. $y = -x^2$, $y = e^x$, $x = 1$, $x = 0$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли
 $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$

5. Найти площадь, ограниченную кардиоидой $r = a(1 - \cos \varphi)$.

6. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t.$$

7. Найти площадь, ограниченную осью ОХ и одной аркой циклоиды

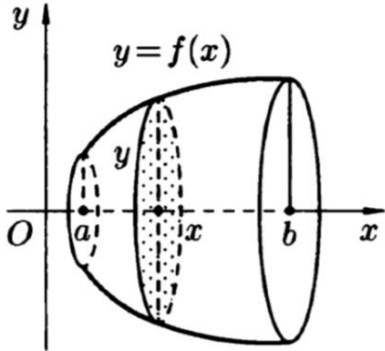
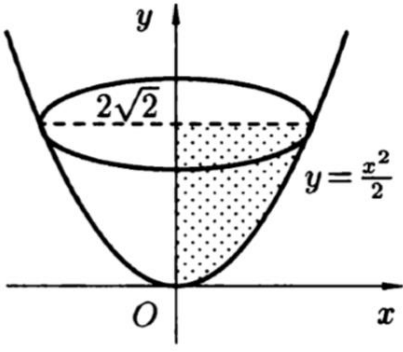
$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t).$$

6.3 Вычисление объемов тел вращения

При вращении плоской кривой вокруг одной из координатных прямых получается объемная фигура - *тело вращения*.

Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения, есть круг, например, с радиусом $y = f(x)$, при вращении вокруг оси OX . Его площадь $S(x) = \pi y^2$.

Тогда объем тела по площади параллельных сечений, равен:

 <p style="text-align: center;">Рисунок 8</p>	$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx, \quad (37)$ <p style="text-align: center;">при вращении вокруг оси OX</p>
 <p style="text-align: center;">Рисунок 9</p>	$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy, \quad (38)$ <p style="text-align: center;">при вращении вокруг оси OY.</p>

Пример 1. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$, $x = 0$, $y = 2\sqrt{2}$ вокруг оси Oy (см. рис. 9).

По формуле (38) находим:

$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi.$$

Если фигура, ограничена кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$; $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси OX , то объем тела вращения:

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx. \quad (39)$$

Если фигура ограничена кривыми $x_1 = \varphi_1(y)$ и $x_2 = \varphi_2(y)$ ($0 \leq \varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$) и прямыми $y = c$; $y = d$ вращается вокруг оси OY , то объём тела вращения:

$$V_y = \pi \int_c^d (x_2^2 - x_1^2) dy. \quad (40)$$

Пример 2. Вычислить объёмы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций $y = 2x - x^2$; $y = -x + 2$, вокруг Ox .

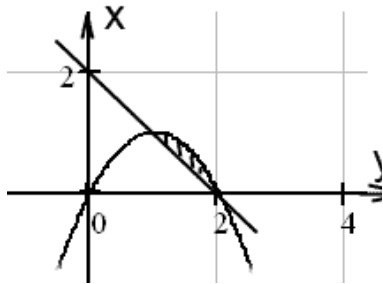


Рисунок 10

По формуле (39) получим

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_1^2 [(2x - x^2)^2 - (2 - x)^2] dx = \\ &= \pi \int_1^2 [(4x^2 + x^4 - 4x^3) - (2 - x)^2] dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \pi \left(\frac{4}{3} x^3 + \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{(2-x)^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \pi \left(\frac{4}{3} (8-1) + \frac{32-1}{5} - (16-1) + \frac{(0-1)}{3} \right) = -\pi \frac{7}{15}, \\ V &= \frac{7}{15} \pi. \end{aligned}$$

Задания для решения в аудитории:

Вычислить объёмы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций.

1. $y = -x^2 + 5x - 6$, $y = 0$. (ось вращения Ox)

2. $y = x^2$, $y^2 - x = 0$. (ось вращения Ox)

3. $y = \ln x$, $x = 2$, $y = 0$ (ось вращения Oy)

4. $y = x^2$, $y = x^3$ (ось вращения Oy)

6.4 Вычисление длины дуги плоской кривой

Используя теорему Пифагора и кусочно-линейную аппроксимацию плоской кривой, получим

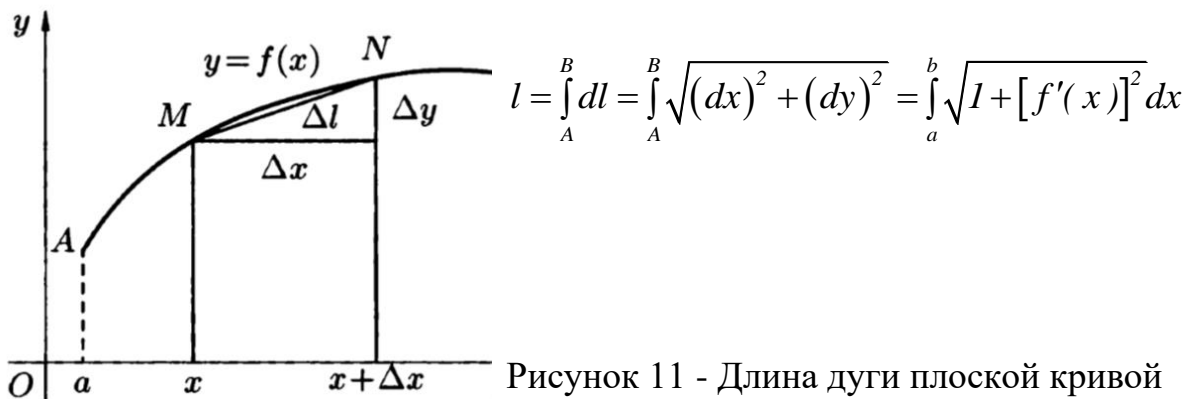


Рисунок 11 - Длина дуги плоской кривой

Длина дуги кривой определяется по формулам:

для кривой, заданной в декартовой системе координат:

$$y = f(x), \quad l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx; \quad (41)$$

для кривой, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \quad (42)$$

для кривой, заданной в полярных координатах:

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta, \quad l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'_\varphi)^2 + r^2} d\varphi. \quad (43)$$

Последнее выражение получено посредством разложения вектора $r(\varphi)$ на проекции $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, связывающих полярные и декартовы координаты. Если параметром считать угол φ , то кривая AB задана параметрически. Воспользовавшись формулой (42), получим

$$x'_\varphi = r'_\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi; \quad y'_\varphi = r'_\varphi \sin \varphi + r \cos \varphi;$$

$$(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = (r'_\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r'_\varphi \sin \varphi + r \cos \varphi)^2 = (r'_\varphi)^2 + r^2.$$

В результате получаем (43).

Пример 1. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln x$, содержащейся между точками, для которых $x = \sqrt{8}$ и $x = \sqrt{15}$.

Воспользуемся формулой (41).

Здесь $a = \sqrt{8}$; $b = \sqrt{15}$; $f(x) = \ln x$; $f'(x) = \frac{1}{x}$, тогда

$$\begin{aligned}
 l &= \int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 1} = t; \quad x^2 + 1 = t^2; \quad x dx = t dt \\ x = \sqrt{8}; \quad t = 3; \quad x = \sqrt{15}; \quad t = 4 \end{array} \right| = \\
 &= \int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2 + 1} \cdot x dx}{x^2} = \int_3^4 \frac{t \cdot t dt}{t^2 - 1} = \int_3^4 \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt = \int_3^4 \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_3^4 = \\
 &= 4 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5} - 3 - \frac{1}{2} \ln \frac{2}{4} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 2} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{6}{5}.
 \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить длину дуги кривой, заданную параметрически

$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t) \\ y = 4(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Воспользуемся формулой (42).

$$x' = 4(-\sin t + \sin t + t \cos t) = 4t \cos t; \quad y' = 4(\cos t - \cos t + t \sin t) = 4t \sin t.$$

$$l = \int_0^2 \sqrt{16t^2 \cos^2 t + 16t^2 \sin^2 t} dt = \int_0^2 4t dt = 2t^2 \Big|_0^2 = 2 \cdot 2^2 = 8.$$

Пример 3. Вычислить длину дуги кривой, заданную уравнением в полярных координатах $\rho = 2e^{4\varphi/3}$; $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Воспользуемся формулой (43). $\rho' = \frac{8}{3} e^{4\varphi/3}$.

$$\begin{aligned}
 l &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4e^{8\varphi/3} + \frac{64}{9} e^{8\varphi/3}} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\frac{100}{9} e^{8\varphi/3}} d\varphi = \frac{10}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\varphi/3} d\varphi = \\
 &= \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{4} e^{4\varphi/3} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{5}{2} \left(e^{\frac{2\pi}{3}} - e^{-\frac{2\pi}{3}} \right).
 \end{aligned}$$

Задания для решения в аудитории:

1) Вычислить длину дуги кривой, заданной в прямоугольной системе координат

$$1. \quad y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{8}{9}.$$

2. $y^2 = (x + 1)^3$, отсеченной прямой $x=4$.

2) Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

1.
$$\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

(циклоида)

2. $x = \frac{t^6}{6}, y = 2 - \frac{t^4}{4}$ между точками пересечения осями координат

3) Вычислить длины дуг кривых, заданных в полярной системе координат:

1. кардиоидой $r = a(1 - \cos \varphi)$;

2. всей кривой $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

6.5 Вычисление площади поверхности вращения

Найдем площадь S поверхности, образованной вращением кривой AB вокруг оси Ox (рисунок 12). Для этого, по-прежнему, воспользуемся кусочно-линейной аппроксимацией кривой. Тогда элементарный элемент тела вращения можно считать усеченным конусом (рисунок 13), площадь боковой поверхности которого вычисляется по известной формуле

$$S_B = 2\pi \frac{R+r}{2} l, \quad (44)$$

где R_{cp} - среднее значение радиусов R и r ; l - образующая.

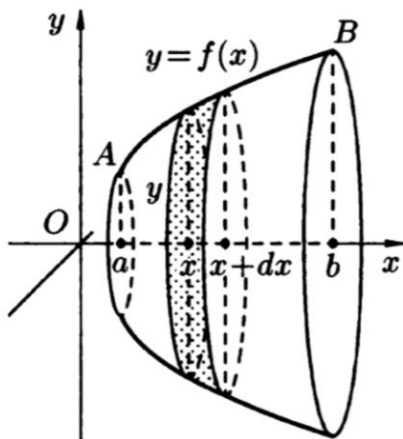


Рисунок 12

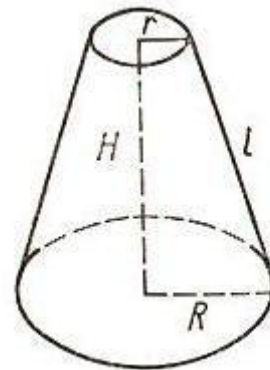


Рисунок 13

Найдем дифференциал площади ds усеченного конуса с образующей dl , и радиусами оснований y и $y + dy$. Площадь его боковой поверхности равна

$$ds = \pi(y + y + dy) \cdot dl = 2\pi y dl + \pi dy dl.$$

Отбрасывая произведение $dy dl$ как бесконечно малую высшего порядка, чем ds , получаем $ds = 2\pi y dl$, или, так как $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$, то $ds = 2\pi y \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$.

Интегрируя полученное равенство в пределах от $x = a$ до $x = b$, получаем искомую площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx. \quad (45)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями, то по аналогии с (42)

$$S_x = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt. \quad (46)$$

Если кривая задана в полярной системе координат, то по аналогии с (43)

$$S_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \varphi \sqrt{r^2 + (r'_{\varphi})^2} d\varphi. \quad (47)$$

При вращении кривой вокруг оси OY

$$S_y = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy. \quad (48)$$

Пример 1. Найти площадь поверхности шара радиуса R .

Поверхность шара образована вращением полуокружности $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$, вокруг оси Ox . По формуле (45) находим

$$\begin{aligned} S_x &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-R}^R R dx = 2\pi R \cdot x \Big|_{-R}^R = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Пример 2. Дана циклоида

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Найти площадь поверхности, образованной вращением ее вокруг оси Ox .

Решение: При вращении половины дуги циклоиды вокруг оси Ox площадь поверхности вращения равна, см (46)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_x &= 2\pi \int_0^{\pi} a(1 - \cos t) \cdot \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} a^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = 4\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= \left. \begin{aligned} &u = \cos \frac{t}{2}; \quad t=0, u=1; \quad t=\pi, u=0 \\ &du = -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt; \end{aligned} \right| = \\ &= -2 \cdot 8\pi a^2 \int_1^0 (1 - u^2) du = -16\pi a^2 \left(u - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^0 = -16\pi a^2 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

т.е. $\frac{1}{2} S_x = \frac{32}{3} \pi a^2$. Следовательно, $S_x = \frac{64}{3} \pi a^2$.

Пример 3. Найти площадь тора, образующегося при вращении окружности $r = \sin \phi$ вокруг оси Ox .

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi} \sin \phi \cdot \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi} d\phi = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\phi) d\phi = \pi^2.$$

Задания для решения в аудитории:

Найти площадь поверхности, полученной вращением

1) дуги параболы $y = 2\sqrt{x}$, $0 < x < 1$ вокруг оси Ox

2) дуги $y = \cos 3x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$ вокруг оси Ox

3) кривой $y = \frac{x^2}{2}$, отсеченной прямой $y=1,5$ вокруг оси ОУ

4) $4x^2 + y^2 = 4$ вокруг ОУ

5) всей кривой $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ вокруг ОХ

Контрольная работа «Неопределенный интеграл» (типовые варианты)

Вариант 1

Найти неопределенные интегралы

- $\int (4 - 3x)e^{-3x} dx.$
- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 1}}.$
- $\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$
- $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x + 1)(x + 2)^3} dx.$
- $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{x^4 \sqrt{x^3}} dx.$
- $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx;$

Вариант 2

Найти неопределенные интегралы

- $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x - 1} dx.$
- $\int \frac{1 + \ln x}{x} dx.$
- $\int \frac{3x^3 + 1}{x^2 - 1} dx.$
- $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 8}{x(x + 2)^3} dx.$
- $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}{x^3 \sqrt{x^2}} dx.$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

Вариант 3

Найти неопределенные интегралы

- $\int (3x + 4)e^{3x} dx.$
- $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$
- $\int \frac{x^3 - 17}{x^2 - 4x + 3} dx.$
- $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 13x - 6}{(x + 2)(x - 2)^3} dx.$
- $\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}} dx.$
- $\int \cos^5 \frac{x}{7} dx$

Вариант 4

Найти неопределенные интегралы

- $\int (4x - 2)\cos 2x dx.$
- $\int \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$
- $\int \frac{2x^3 + 5}{x^2 - x - 2} dx.$
- $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 14x + 10}{(x + 1)(x + 2)^3} dx.$
- $\int \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}{x^9 \sqrt{x^4}} dx.$
- $\int \operatorname{ctg}^3 x dx$

Контрольная работа «Определенный интеграл» (типовые варианты)

Вариант 1.

1). $\int_{-a}^a \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ 2). $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$ 3). $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4}$

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy = 4, x + y - 5 = 0$.

5) Вычислить длину кардиоиды: $S = a(1 - \cos \phi)$.

6) Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной параболлами: $y = -x^2 + 8$ и $y = x^2$

Вариант 2.

1). $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}$ 2). $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x}$ 3). $\int_0^{\infty} e^{-ax} dx \quad a > 0$

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = 16 - 8x$ и $y^2 = 24x + 48$.

5) Вычислить длину всей линии: $S = \sin^2 \frac{\phi}{2}$.

6) Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной фигурой, ограниченной осью ОХ, прямой $x = \pi$ и аркой циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

Вариант 3.

1). $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2} dx}{x^6}$ 2). $\int_2^3 \frac{x dx}{2x^2 + 3x - 2}$ 3). $\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx \quad a > 0$

4) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2 = x^2 - 3x$ и $3x + y - 4 = 0$.

5) Вычислить длину линии: $\begin{cases} x = R(\cos t + t \sin t) \\ y = R(\sin t - t \cos t) \end{cases}$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$

6) Фигура, ограниченная дугами парабол $y = x^2; x = y^2$ вращается вокруг оси абсцисс. Найти объём тела вращения.

Вариант 4.

1). $\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$ 2). $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$ 3). $\int_1^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$

4) Фигура ограничена линией $S = 4 \cos 3\phi$. Вычислить площадь той её части, которая расположена вне круга $S = 2$.

5) Вычислить длину дуги кривой $y = \sqrt{(x + 1)^3} \quad (-1 \leq x \leq 1)$

6) Вычислить объём тела, полученного от вращения вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2px$ и $x = n \quad (p > 0, n > 0)$.

Приложение 1. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

Правила дифференцирования

$$1. (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$2. (u \cdot v)' = u'v + uv', \text{ в частности, } (cu)' = c \cdot u';$$

$$3. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \text{ в частности } \left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2};$$

$$4. y'_x = y'_u \cdot u'_x, \text{ если } y = f(u), u = \varphi(x);$$

$$5. (u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$$

Формулы дифференцирования

$$1. (c)' = 0;$$

$$2. (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u', \text{ в частности, } (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'; \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = (u^{-1})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

$$3. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u', \text{ в частности, } (e^u)' = e^u \cdot u';$$

$$4. (\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u', \text{ в частности } (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$$

$$5. (\sin u)' = \cos u \cdot u';$$

$$6. (\cos u)' = -\sin u \cdot u';$$

$$7. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$$

$$8. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$$

$$9. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$10. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$$

$$11. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$12. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$$

$$13. (\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u';$$

$$14. (\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u';$$

$$15. (\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u';$$

$$16. (\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$$

Приложение 2. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) \quad (\int du = u + C);$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$
3. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C; \quad \int e^u du = e^u + C;$
4. $\int \sin u du = -\cos u + C \quad (\int \sin u \cdot du = -\cos u + C);$
5. $\int \cos u du = \sin u + C \quad (\int \cos u \cdot du = \sin u + C);$
6. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C;$
7. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C;$
8. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \quad \left(\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C \right);$
9. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \quad \left(\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C \right);$
10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C;$
11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$
12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$
13. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C;$
14. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C.$
15. $\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C;$
16. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$
17. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$

Приложение 3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПОДСТАНОВКИ

1. Интегрирование функции от линейного двучлена:

$$\text{если } \int f(x)dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

2. Формула интегрирования по частям: $\int u dv = uv - \int v du$.

3. Универсальная тригонометрическая подстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

4. Тригонометрическая подстановка $t = \operatorname{tg} x$, тогда

$$x = \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

5. Формулы тригонометрии:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x); \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

6. Использование тригонометрических подстановок:

$$\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx \rightarrow x = a \cdot \sin t;$$

$$\int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx \rightarrow x = a \cdot \operatorname{tg} t;$$

$$\int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx \rightarrow x = \frac{a}{\sin t}.$$

Приложение 4. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

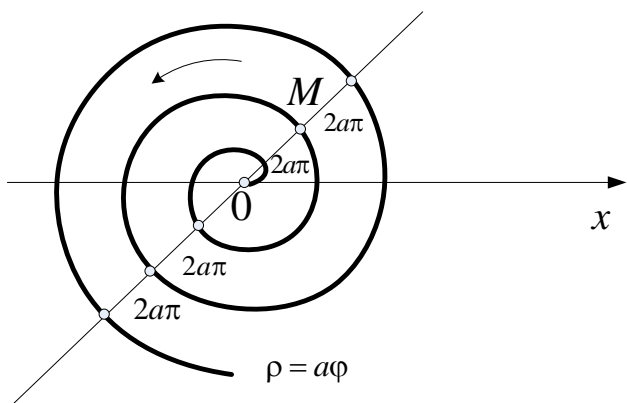


Рисунок 1 - Спираль Архимеда

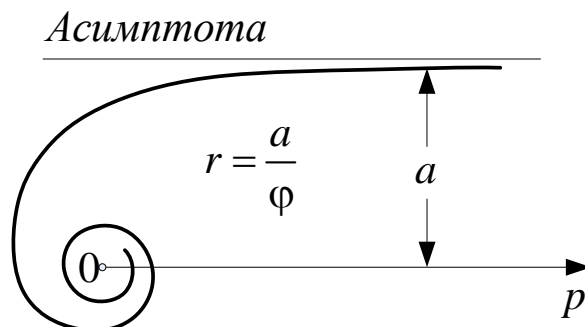


Рисунок 2 - Гиперболическая спираль

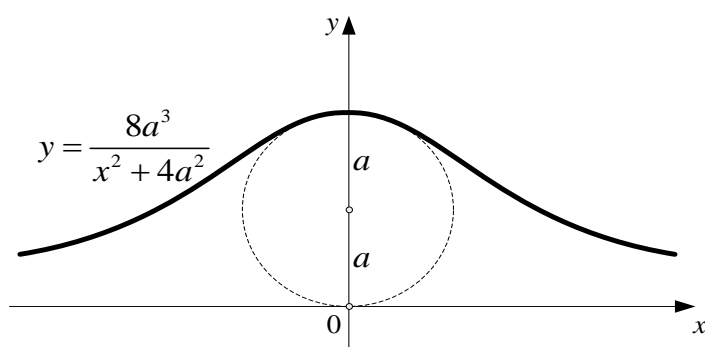


Рисунок 3 - Локон

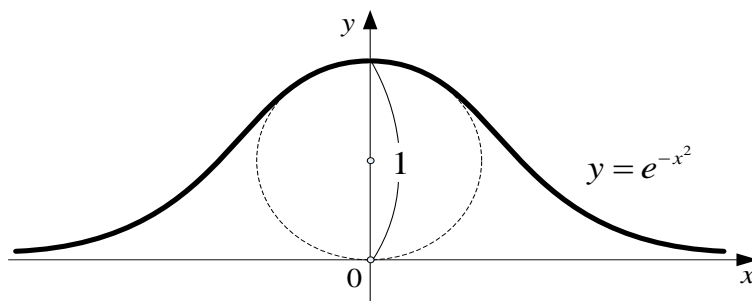


Рисунок 4 - Кривая вероятностей

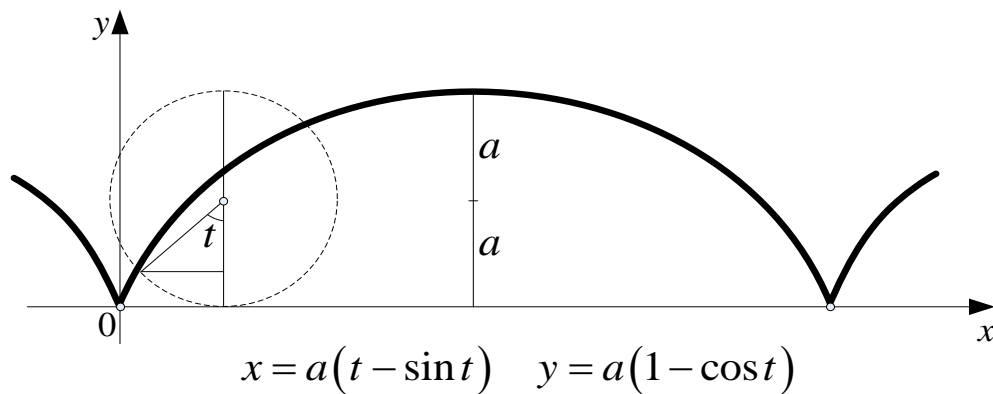


Рисунок 5 - Циклоида

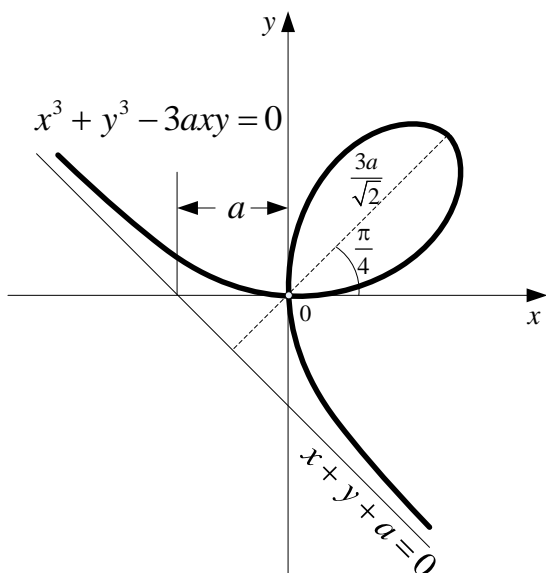


Рисунок 6 - Декартов лист

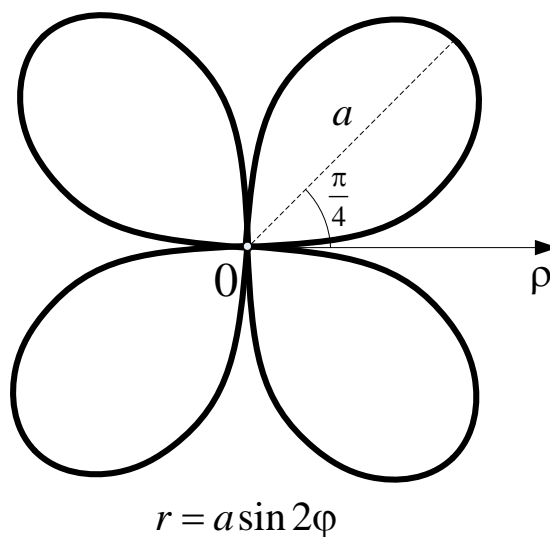


Рисунок 7 - Четырёхлепестковая роза

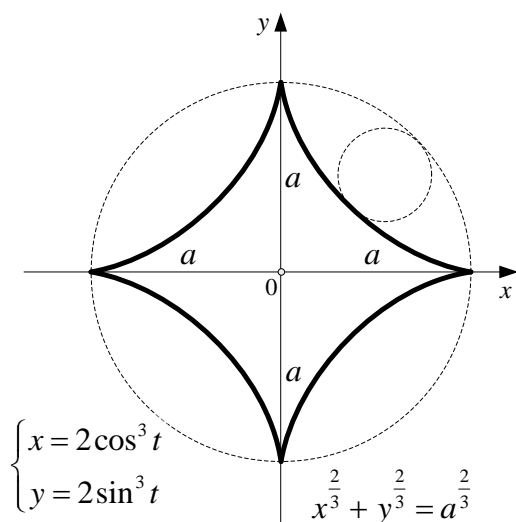


Рисунок 8 - Астроида

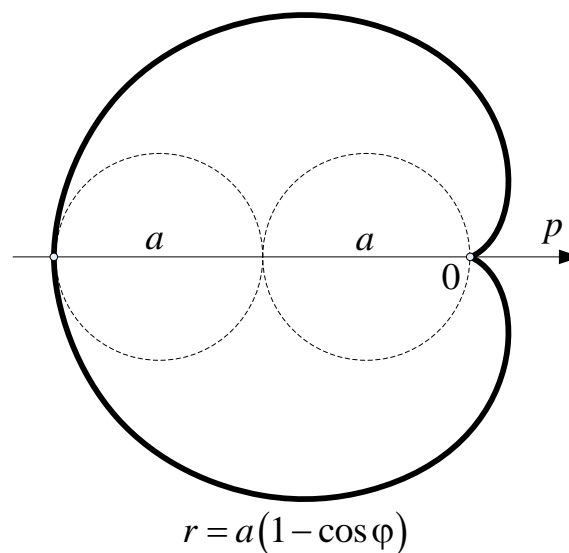


Рисунок 9 - Кардиоида

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

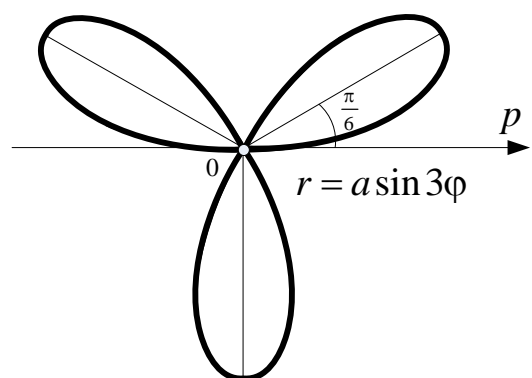


Рисунок 10 - Трёхлепестковая роза

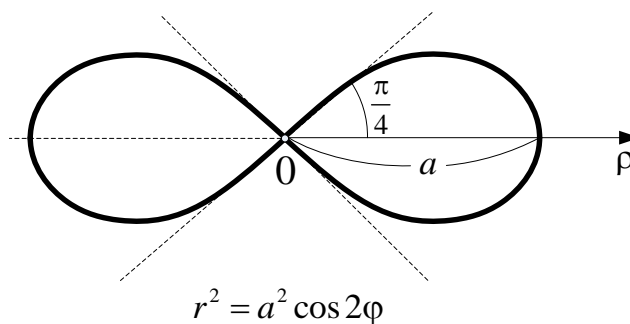


Рисунок 11 - Лемниската Бернулли

ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. - 10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.
2. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для студентов вузов в 2-х т. Т. 1. - изд. стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 416 с. - (Гр.).
3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для студентов вузов в 2-х т. Т. 2. - изд. стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 544 с. - (Гр.).
4. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов: Учеб. пособие. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 464 с.
5. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономистов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / [Кремер Н.Ш и др.] под ред. проф. Кремера Н.Ш. - 3е изд. - М.ЮНИТИ-ДАНА, 2010. -479с.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. — М.: Физматлит, 2006. — 335 с.
7. Литвин Д.Б., Таволжанская О.Н., Мелешко С.В., Гулай Т.А. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : учебное пособие. - Ставрополь : Сервисшкола, 2016. - 80с.
8. Литвин Д.Б., Мелешко С.В., Яновский А.А. Определенный интеграл. Функции нескольких переменных: Учебное пособие, 2-е издание— Ставрополь : Сервисшкола, 2017. – 62с.

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 29.01.2021. Бумага офсетная. Гарнитура "Times".
Формат 60×84/16. Усл. печ. л.4,75. Тираж 255 экз. Заказ №14.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии "АГРУС" Ставропольского ГАУ, Ставрополь,
ул. Пушкина,15. тел. 35-06-94.